

SUPPORT DE COURS

Les Applications

1^{ère} BAC Sciences mathématiques

Lycée Moulay Ali cherif

Enseignant

Dr : CHOKRI NOUAR

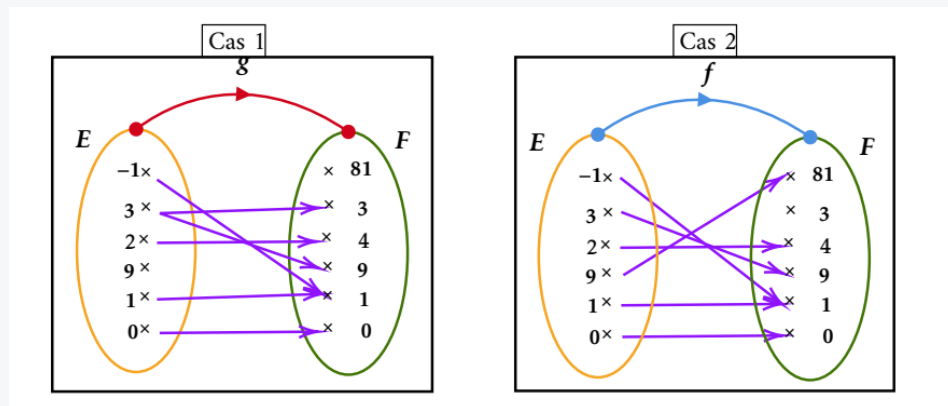
www.chokrinouar.com

Les Applications

3.1 Application

Activité

- On considère les ensembles $E = \{-1, 0, 1, 2, 3, 9\}$ et $F = \{0, 1, 3, 4, 9, 81\}$.
- On considère la relation f (ou g) qui associe un élément de E à un élément de F (voir figures).



Que remarquez-vous ?

.....

Vocabulaire :

- La relation f est appelée application de E vers F , une telle relation est souvent notée f , g ou h .
- L'ensemble E est appelé ensemble de départ (ou ensemble de source).

- L'ensemble F est appelé ensemble d'arrivée (ou ensemble d'image).
- Un élément de E , on le note par x et on l'appelle antécédent.
- Un élément de F , on le note par y et on l'appelle image.
- On résume ce qui précède par :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

Définition. Soient E et F deux ensembles non vides. Toute relation f qui associe chaque élément x de E à un et un seul élément y de F est appelée une application de E vers F . On la note par :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

Remarque.

- Toute fonction est une application de son ensemble de définition D_f vers $\mathbb{R}$.
- Toute application $f : E \rightarrow F$ est une fonction de $f : E \rightarrow F$.
- Si $F = E$, on dit que f est une application sur E .
- Soient f et g deux applications telles que :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F & \text{et} & & g : E' &\rightarrow F' \\ x &\mapsto f(x) = y & & & x &\mapsto g(x) = y \end{aligned}$$

Les applications f et g sont dites égales (ou identiques) si et seulement si

$$\begin{cases} E = E' & \text{et} & F = F' \\ (\forall x \in E); f(x) = g(x) \end{cases}$$

On note $f = g$.

Exemple. On considère les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3 \cos^2(x) \sin^2(x) & & & x &\mapsto 1 - \cos^6(x) - \sin^6(x) \end{aligned}$$

- Démontrer que pour tout $f = g$

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
 g(x) &= 1 - \cos^6(x) - \sin^6(x) \\
 &= \cos^2(x) + \sin^2(x) - \cos^6(x) - \sin^6(x) \\
 &= \cos^2(x) (1 - \cos^4(x)) + \sin^2(x) (1 - \sin^4(x)) \\
 &= \cos^2(x) (1 - \cos^2(x)) (1 + \cos^2(x)) + \sin^2(x) (1 - \sin^2(x)) (1 + \sin^2(x)) \\
 &= \cos^2(x) \cdot \sin^2(x) (1 + \cos^2(x)) + \sin^2(x) \cdot \cos^2(x) (1 + \sin^2(x)) \\
 &= \cos^2(x) \cdot \sin^2(x) (1 + \cos^2(x) + 1 + \sin^2(x)) \\
 &= 3 \cos^2(x) \cdot \sin^2(x) \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = g(x)$. Ainsi, nous avons montré que $f = g$.

Exercice d'application. On considère les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 x \mapsto \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} & \text{et} \quad x \mapsto x^2 - 1
 \end{array}$$

1. Est-ce que $f = g$?

Solution :

.....

.....

.....

.....

.....

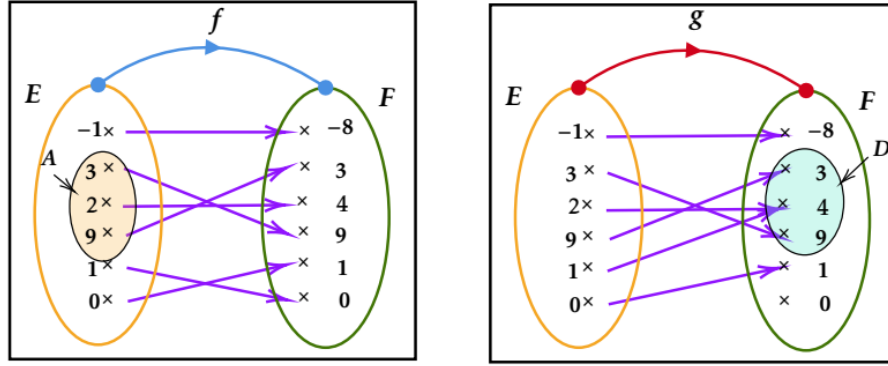
.....

.....

3.1.1 L'image directe - L'image réciproque

Activité

On considère les deux applications suivantes :



1. Déterminer la partie B de F telle que ses éléments sont : les images des éléments de A par la l'application f .
2. Déterminer la partie C de E telle que ses éléments sont : les antécédents des éléments de D par l'application g .

Vocabulaire :

1. La partie $B = \{3, 4, 9\}$ est appelée l'image directe de la partie A de l'ensemble de départ E , et on note : $B = f(A)$.
On a $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$.
2. La partie $C = \{1, 2, 3, 9\}$ est appelée l'image réciproque de la partie D de l'ensemble d'arrivée F , et on note : $C = g^{-1}(D)$.
On a : $g^{-1}(D) = \{x \in E \mid g(x) \in D\}$.

L'image directe

Si $f : E \rightarrow F$ est une application et A est une partie de E (avec $A \subset E$), alors l'image des éléments de la partie A de E constitue une partie B de F appelée image directe de A et on note : $B = f(A)$ ou encore $B = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F$.

Remarque.

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x).$$

L'image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et B une partie de F , avec $B \subset F$.
Les antécédents des éléments de la partie B de F constituent une partie C de E , appelée image réciproque de B , et on note :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Remarque.

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

Exercice d'application.

1. Soit l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, \\ n &\mapsto 2n. \end{aligned}$$

- (a) Déterminer $f(\{0, 1, 2, 5\})$ et $f^{-1}(\{4, 6, 12\})$.
 (b) Déterminer $f(\mathbb{N})$ et $f^{-1}(\{0, 2, 4, \dots, 2n, \dots\}) = f^{-1}(2\mathbb{N})$.
 (c) Est-ce que l'implication suivante est vraie ?

$$\forall n, n' \in \mathbb{N} : f(n) = f(n') \implies n = n'.$$

2. Soit l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, \\ (a, b) &\mapsto a. \end{aligned}$$

- (a) Déterminer $f((2, 1))$ et $f((2, 7))$.
 (b) Écrire en compréhension $f^{-1}(\{2\})$ (c'est-à-dire l'ensemble des antécédents de 2).
 (c) Est-ce que l'implication suivante est vraie ?

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \forall (a', b') \in \mathbb{N}^2 : f((a, b)) = f((a', b')) \implies (a, b) = (a', b').$$

Solution :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété. Soit $f : E \rightarrow F$ une application, et A et B deux parties d'un ensemble E (de départ) et C et D deux parties d'un ensemble F (d'arrivée).

1. $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

4. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
5. $C \subset D \implies f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.
6. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
7. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

Démonstration :

1. Montrons que : $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$
 On a $A \subset B$ et nous devons démontrer que $f(A) \subset f(B)$.
 Soit $y_A \in f(A)$. Cela signifie qu'il existe $x_A \in A$ tel que $y_A = f(x_A)$.
 Comme $A \subset B$, on a $x_A \in B$, ce qui implique que $y_A = f(x_A) \in f(B)$.
 Ainsi, $f(A) \subset f(B)$.
2. Montrons que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 — **D'abord, montrons que : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.**
 Soit $y \in f(A \cup B)$, cela signifie qu'il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
 Donc, $x \in A \cup B \implies x \in A$ ou $x \in B$.
 Dans les deux cas, $y = f(x) \in f(A)$ ou $y \in f(B)$, donc $y \in f(A) \cup f(B)$.
 Conclusion : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
 — **Montrons que : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.**
 On a $A \subset A \cup B \implies f(A) \subset f(A \cup B)$ (par la propriété 1).
 De même, $B \subset A \cup B \implies f(B) \subset f(A \cup B)$.
 Donc, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
 Conclusion : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
 Conclusion finale : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. Immédiat.
4. Montrons que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
 Soit $y \in f(A \cap B)$. Cela signifie qu'il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.
 Comme $x \in A \cap B$, on a $x \in A$ et $x \in B$.
 Donc, $y = f(x) \in f(A)$ et $y \in f(B)$, ce qui implique que $y \in f(A) \cap f(B)$.
 Conclusion : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
5. Montrons que : $C \subset D \implies f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
 Soit $x \in f^{-1}(C)$, cela signifie que $f(x) \in C$.
 Comme $C \subset D$, on a $f(x) \in D$, donc $x \in f^{-1}(D)$.
 Conclusion : $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.
6. Soient C et D deux parties de F . Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(C \cup D) &\iff f(x) \in C \cup D \\
 &\iff f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D \\
 &\iff x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D) \\
 &\iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)
 \end{aligned}$$

Donc on obtient : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

7. Soient C et D deux parties de F . Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\iff f(x) \in C \cap D \\ &\iff f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) \\ &\iff x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{aligned}$$

Donc on obtient : $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

3.1.2 Restriction d'une fonction - Prolongement d'une fonction

Activité

On considère les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & \quad g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto |x| - 5x & \quad \text{et} \quad x \mapsto -4x. \end{aligned}$$

1. Simplifier l'expression de $f(x)$ sur $[0, +\infty[$.
2. Quelle relation relie les deux fonctions ?

Solution :

1. — **Pour** $x \geq 0$:

$$f(x) = |x| - 5x = x - 5x = -4x.$$

Donc, pour $x \geq 0$, $f(x) = -4x$.

- **Pour** $x < 0$:

$$f(x) = |x| - 5x = -x - 5x = -6x.$$

Donc, pour $x < 0$, $f(x) = -6x$.

En résumé, l'application f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -4x & \text{si } x \geq 0, \\ -6x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2. $(\forall x \in [0, +\infty[), \quad g(x) = f(x).$

Vocabulaire :

- L'application g est la restriction de f à $[0, +\infty[$.
- L'application f est le prolongement de g sur $\mathbb{R}$.

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et B une partie de F avec $B \subset F$.

Toute application g telle que :

- L'ensemble de départ est une partie A de E ($A \subset E$).
- $(\forall x \in A), \quad g(x) = f(x)$.

est appelée la restriction de f sur A et on note :
$$\begin{aligned} g : A &\rightarrow F, \\ x &\mapsto g(x) = f(x). \end{aligned}$$

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et B un ensemble tel que $E \subset B$.

Toute application h telle que :

- L'ensemble de départ est B avec $E \subset B$,
- $(\forall x \in E), \quad h(x) = f(x)$,

est appelée le prolongement de f sur B , et on a :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \in E, \\ h(x) = \ell_x & \text{si } x \in B \setminus E. \end{cases}$$

Remarque. Le prolongement n'est pas unique.

Exercice d'application.

1. On considère les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & g : [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| - 5x & & & x &\mapsto -4x \end{aligned}$$

Est-ce que l'application g est une restriction de f sur $[0, +\infty[$?

2. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : [-1, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^3 \end{aligned}$$

Est-ce que l'application g est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$?

Avec :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -2x^4 + 2x^3|x + 1| \end{aligned}$$

Solution :

.....

.....

.....

3.2 Applications : Injective - Surjective - Bijective et La bijection réciproque

3.2.1 Application Injective

Activité

1. On considère l'application : $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto f(n) = |n|$$
 - (a) Déterminer les images de 0, -2 et 3.
 - (b) Déterminer les antécédents de 1, 0 et 3.
 - (c) Est-ce que l'implication $f(n) = f(n') \implies n = n'$ est vraie ?
2. On considère l'application : $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

$$(n, m) \mapsto f((n, m)) = n \times m$$
 - (a) Déterminer les images de (1, 0), (2, -3) et (-6, 1).
 - (b) Déterminer les antécédents de 1, 6 et 0.
 - (c) Est-ce que, pour tout (n, m) et (n', m') de $\mathbb{N}^2$, l'implication $f((n, m)) = f((n', m')) \implies (n = n' \text{ et } m = m')$ est-elle vraie ?

Solution :

1. Soit l'application : $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto f(n) = |n|$$
 - (a) **Images :**

$$f(0) = |0| = 0, \quad f(-2) = |-2| = 2, \quad f(3) = |3| = 3.$$
 - (b) **Antécédents :**

Pour $f(n) = 1$, $n = \pm 1$, pour $f(n) = 0$, $n = 0$, pour $f(n) = 3$, $n = \pm 3$.
 - (c) L'implication $f(n) = f(n') \implies n = n'$ n'est pas vraie. Par exemple, $f(1) = f(-1) = 1$, mais $1 \neq -1$.
2. Soit l'application : $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

$$(n, m) \mapsto f((n, m)) = n \times m$$

(a) **Images :**

$$f((1, 0)) = 1 \times 0 = 0, \quad f((2, -3)) = 2 \times (-3) = -6, \quad f((-6, 1)) = -6 \times 1 = -6.$$

(b) **Antécédents :**

Pour $f((n, m)) = 1$, les antécédents sont $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

(c) L'implication $f((n, m)) = f((n', m')) \implies (n = n' \text{ et } m = m')$ n'est pas vraie. Par exemple, $f((2, 3)) = f((3, 2)) = 6$, mais $(2, 3) \neq (3, 2)$.

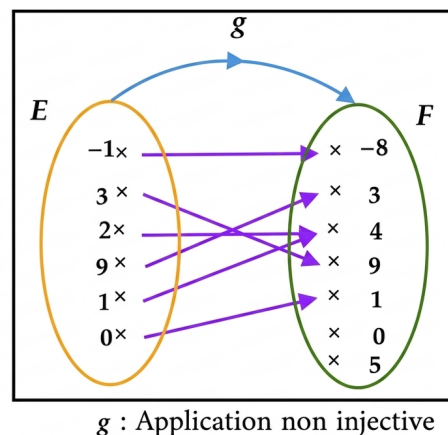
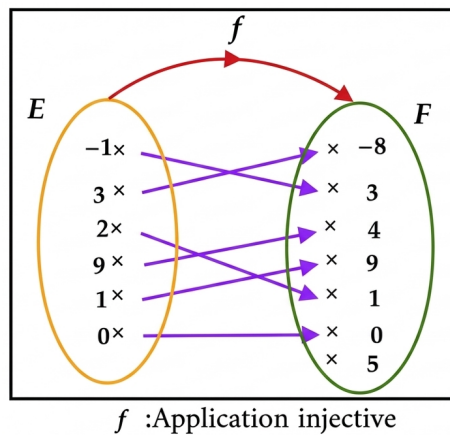
Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

f est appelée application injective (ou f est une injection) si et seulement si, pour chaque élément y de F , il existe au plus un antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore :

$$(f \text{ est injective}) \iff (\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \implies x = x')$$

Illustration



Exemple. On considère l'application :

$$f :]1, +\infty[\rightarrow]2, +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{2x}{x-1}$$

Montrer que l'application f est injective.

Soit $(x, y) \in (]1, +\infty[)^2$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies \frac{2x}{x-1} = \frac{2y}{y-1} \\ &\implies 2x(y-1) = 2y(x-1) \\ &\implies 2xy - 2x = 2xy - 2y \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

Ceci signifie que l'application f est injective.

Remarque.

$$f \text{ non injective} \iff \exists (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \text{ et } x \neq y$$

Exemple. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Montrer que f n'est pas injective.

On a : $f(1) = 0 = f(2)$ mais $1 \neq 2$. Ceci signifie que l'application f n'est donc pas injective.

Exercice d'application. On considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Est-ce que l'application f est injective ?

Solution :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 1. On considère l'application :

$$f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x + \sqrt{x^2 - x}$$

Montrer que f est injective.

Solution : Soit $(x, y) \in (]1, +\infty[)^2$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies x + \sqrt{x^2 - x} = y + \sqrt{y^2 - y} \\ &\implies \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{y^2 - y} \right)^2 = (y - x)^2 \\ &\implies (x^2 - x) - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + (y^2 - y) = y^2 - 2yx + x^2 \\ &\implies -x - y - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + 2yx = 0 \\ &\implies -x + yx - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} - y + yx = 0 \\ &\implies x(y - 1) - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + y(x - 1) = 0 \\ &\implies \sqrt{x^2(y - 1)^2} - 2\sqrt{x^2 - x}\sqrt{y^2 - y} + \sqrt{y^2(x - 1)^2} = 0 \\ &\implies \left(\sqrt{x(y - 1)} - \sqrt{y(x - 1)} \right)^2 = 0 \\ &\implies \sqrt{x(y - 1)} = \sqrt{y(x - 1)} \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

Ceci signifie que l'application f est injective.

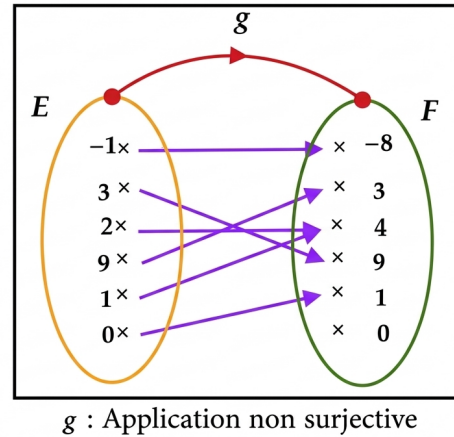
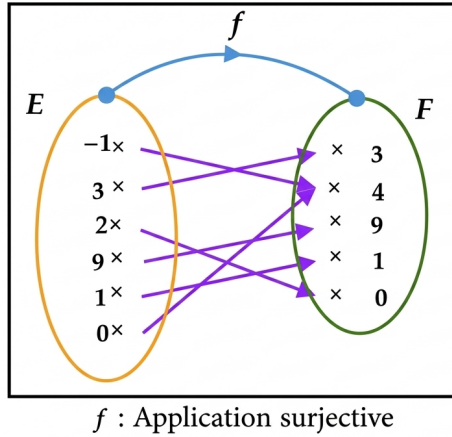
3.2.2 Application Surjective

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

f est appelée application surjective (ou f est une surjection) si et seulement si, pour chaque élément y de F , il existe au moins un antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore :

$$(f \text{ est surjective}) \iff (\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x))$$

Illustration**Remarque.**

- Pour démontrer que f est surjective, il suffit de démontrer que l'équation $x \in E : f(x) = y$ admet au moins une solution x dans E pour tout y de F .
- $(f \text{ est surjective}) \iff f(E) = F$.

Exemple. On considère l'application :

$$f :]1, +\infty[\rightarrow]2, +\infty[$$

$$x \mapsto \frac{2x}{x-1}$$

Montrer que f est surjective.

Soit $y \in]2, +\infty[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $]1, +\infty[$. Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{2x}{x-1} = y \\ &\iff 2x = y(x-1), \quad (x-1 \neq 0 \text{ pour } x > 1) \\ &\iff 2x - yx = -y \\ &\iff x(2-y) = -y \\ &\iff x = \frac{y}{y-2}, \quad (y-2 \neq 0) \end{aligned}$$

Comme $\frac{y}{y-2} > 1$ c'est-à-dire $\frac{y}{y-2} \in]1, +\infty[$, alors l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $]1, +\infty[$. Ceci signifie que f est surjective.

Exercice d'application. Soit l'application définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3|x|$$

1. L'application f est-elle surjective ?
2. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$. L'application g est-elle surjective ? avec :

$$g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3x|x + 1| - 3x^2$$

Solution :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 2. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow]0, 1]$$

$$x \mapsto \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

Montrer que f est surjective.

Solution : Soit $y \in]0, 1]$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = y \iff \frac{1}{x^2 - 2x + 2} = y$$

$$\iff (x^2 - 2x + 2) = \frac{1}{y}, \quad (y \neq 0 \text{ et } x^2 - 2x + 2 \neq 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R})$$

$$\iff (x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{y} - 1$$

$$\iff (x - 1)^2 = \frac{1 - y}{y}$$

$$\iff |x - 1| = \sqrt{\frac{1 - y}{y}} \quad \left(\text{car : } y \in]0, 1] \implies \frac{1 - y}{y} \geq 0 \right)$$

$$\iff x = \sqrt{\frac{1 - y}{y}} + 1 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{1 - y}{y}} + 1$$

D'où l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$. Ceci signifie que l'application f est surjective.

3.2.3 Application Bijective et l'Application Réciproque

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

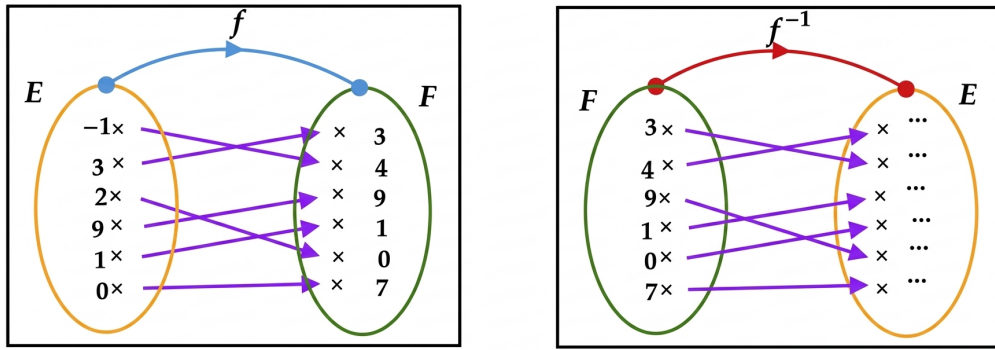
f est appelée application bijective (ou f est une bijection) si et seulement si, pour chaque élément y de F , il existe un et un seul antécédent x de l'ensemble de départ E .

Ou encore :

$$(f \text{ est bijective}) \iff (\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)).$$

- L'application g de F vers E , qui associe à chaque élément y de F l'unique élément x de E tel que $f(x) = y$, est appelée application réciproque de l'application f et on note $g = f^{-1}$.

Illustration



Remarque.

1. (f est une application bijective) $\iff$ (f est injective et surjective).
2. L'application réciproque f^{-1} s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\rightarrow E \\ y &\mapsto f^{-1}(y) \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\rightarrow E \\ x &\mapsto f^{-1}(x) \quad (\text{on utilise la variable } x \text{ au lieu de } y). \end{aligned}$$

3. La relation entre f et f^{-1} est :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E \end{cases} \iff \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in F \end{cases}$$

4. Pour démontrer que f est bijective, il suffit de démontrer que l'équation $x \in E : f(x) = y$ admet une solution unique x dans E pour tout y de F . (L'inconnue est x , mais y représente les éléments de F).

Exemple. On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$$

Montrer que f est bijective.

Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x+1}{x-2} = y \\ &\iff x+1 = y(x-2), \quad (x-2 \neq 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}) \\ &\iff x+1 = yx-2y \\ &\iff x-yx = -2y-1 \\ &\iff x(1-y) = -2y-1 \\ &\iff x = \frac{2y+1}{y-1}, \quad (y-1 \neq 0) \end{aligned}$$

Nous avons : $x = \frac{2y+1}{y-1} \neq 2$, en effet, si $\frac{2y+1}{y-1} = 2$, cela revient à : $2y+1 = 2y-2 \iff 1 = -2$ (absurde).

Donc, on déduit que $\frac{2y+1}{y-1} \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Ainsi, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ce qui signifie que f est bijective.

Exercice d'application.

1. Soit l'application suivante : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = 3x - 2$
 - (a) Est-ce que f est surjective ?
 - (b) Est-ce que f est injective ?
 - (c) Si oui, déterminer l'application réciproque f^{-1} de l'application f .
2. Soit l'application suivante : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2 - 2x$
 - (a) Est-ce que f est surjective ?
 - (b) Est-ce que f est bijective ?

Solution :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 3. On considère l'application suivante :

$$f : \left[\frac{-1}{4}, +\infty \right[\rightarrow \left[\frac{5}{2}, +\infty \right[\\ x \mapsto \frac{5}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

Montrer que f est bijective.

Solution : Soit $y \in \left[\frac{5}{2}, +\infty \right[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $\left[\frac{-1}{4}, +\infty \right[$. Soit $x \in \left[\frac{-1}{4}, +\infty \right[$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{5}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = y \\ &\iff \sqrt{x + \frac{1}{4}} = y - \frac{5}{2} \\ &\iff x + \frac{1}{4} = \left(y - \frac{5}{2} \right)^2, \quad \left(x + \frac{1}{4} \geq 0 \text{ pour } x \in \left[\frac{-1}{4}, +\infty \right[\right) \\ &\iff x = \left(y - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Comme $\left(y - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$, c'est-à-dire que $\left(y - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \in \left[\frac{-1}{4}, +\infty \right[$, alors l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\left[\frac{-1}{4}, +\infty \right[$. Ceci signifie que f est bijective.

Exercice 4. Soit l'application suivante :

$$f : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[\\ x \mapsto x^2 - 4x + 5$$

Montrer que f est bijective et donner f^{-1} .

Solution : Soit $y \in [1, +\infty[$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ dans $[2, +\infty[$.
Soit $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff x^2 - 4x + 5 = y \\ &\iff (x^2 - 4x + 4) + 1 = y \\ &\iff (x - 2)^2 = y - 1 \\ &\iff |x - 2| = \sqrt{y - 1} \\ &\iff x - 2 = \sqrt{y - 1} \quad \text{car : } x - 2 \geq 0 \\ &\iff x = 2 + \sqrt{y - 1} \end{aligned}$$

Comme $2 + \sqrt{y - 1} \geq 2$, c'est-à-dire $2 + \sqrt{y - 1} \in [2, +\infty[$, ceci signifie que f est une application

bijective. Sa réciproque est l'application f^{-1} définie par :

$$f^{-1} : [1, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[\\ x \mapsto 2 + \sqrt{x - 1}$$

3.3 Composée des applications

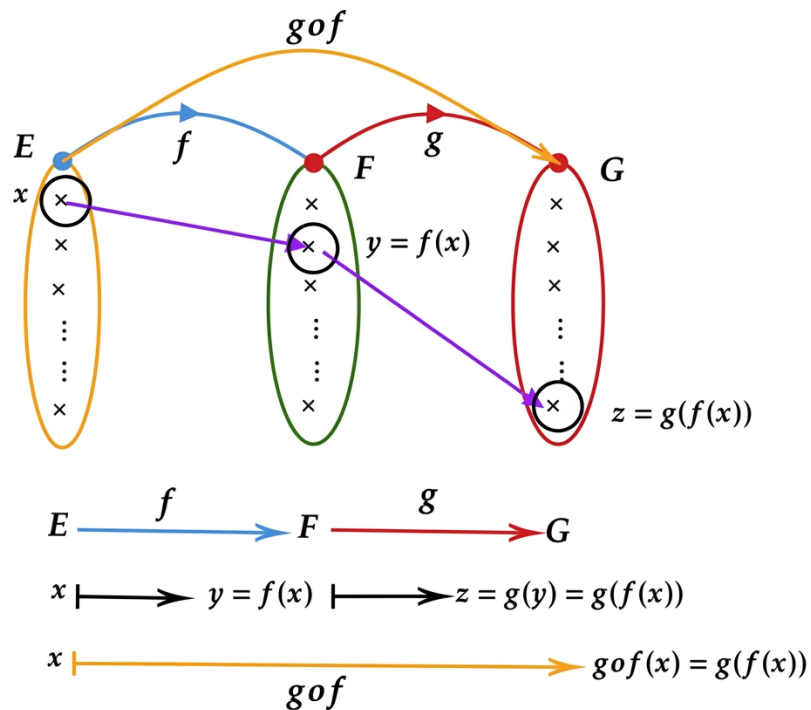
Définition. On considère les deux applications : $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

L'application $h : E \rightarrow G$ définie par : $\forall x \in E, h(x) = g(f(x))$ est appelée la composée de f et g dans cet ordre, et on note par : $g \circ f$.

Donc : $h = g \circ f : E \rightarrow G$

$$x \mapsto h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$$

Illustration



Exemple. Considérons les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto x + 1 \quad \text{et} \quad x \mapsto x^2$$

Pour tout réel x , on a :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (x + 1)^2 \quad \text{et} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + 1$$

Remarque.

1. La composée de deux applications n'est pas toujours commutative : $f \circ g \neq g \circ f$ (en général).
2. La composée des applications est associative : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$. On peut aussi écrire $f \circ g \circ h$.
3. Si f est une application bijective et f^{-1} l'application réciproque de f , alors :
4. $(\forall x \in F), \quad f \circ f^{-1}(x) = x$, donc $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ (**application identique sur F**).
5. $(\forall x \in E), \quad f^{-1} \circ f(x) = x$, donc $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ (**application identique sur E**).

Exercice d'application. On considère les deux applications :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x \mapsto 4x^3 - 2x \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$$

1. Déterminer $g \circ f$ puis $f \circ g$.

On considère l'application suivante :

$$f : [0, 2] \rightarrow [0, 2],$$

$$x \mapsto (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2$$

1. Montrer que f est une application bijective.
2. Calculer $f \circ f(x)$, puis en déduire l'application réciproque f^{-1} de l'application f .

Solution :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.4 Série d'exercices

Exercice 1. Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f(k) = 2k \quad \text{et} \quad g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ (k-1)/2 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g .
2. Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ et étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(x, y) = x + y$.

1. Montrer que l'application f est surjective.
2. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x - 2$.

1. Montrer que f est injective.
2. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 4. On considère deux ensembles non vides E et F , et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.
 - (a) Montrer que si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.
 - (b) En déduire que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
 - (c) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Montrer que si f est injective, alors pour tous A et B éléments de $\mathcal{P}(E)$:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

3. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour toute partie A de E :

$$f\left(C_E^A\right) = C_F^{f(A)}.$$

Exercice 5. On considère deux ensembles non vides E et F , et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Soit A un élément de $\mathcal{P}(F)$. Montrer que $f(f^{-1}(A)) \subset A$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$:

$$f(f^{-1}(A)) = A.$$

Exercice 6. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Établir les implications suivantes :

1. $g \circ f$ injective $\implies f$ injective.
2. $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective.
3. $g \circ f$ injective et f surjective $\implies g$ injective.
4. $g \circ f$ surjective et g injective $\implies f$ surjective.

Exercice 7. Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ et $g_1, g_2 : F \rightarrow G$. On suppose que f est surjective et que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrer que $g_1 = g_2$.

Exercice 8. On considère l'application

$$f : \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\rightarrow \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[, \quad x \mapsto x^2 + x + 2.$$

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 9. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto \frac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}.$$

1. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.
2. Montrer que f n'est pas injective.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \frac{1}{4}$.
4. Montrer que f n'est pas surjective.